



# CONTRIBUTIONS A L'APPROXIMATION NUMERIQUE D'OPERATEURS ET DE LEURS SPECTRES

Laurence Grammont

## ► To cite this version:

Laurence Grammont. CONTRIBUTIONS A L'APPROXIMATION NUMERIQUE D'OPERATEURS ET DE LEURS SPECTRES. Analyse numérique [math.NA]. Université Jean Monnet - Saint-Etienne, 2012. tel-00867034

**HAL Id: tel-00867034**

**<https://theses.hal.science/tel-00867034>**

Submitted on 27 Sep 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Jean Monnet - Saint-Etienne  
membre de Université de Lyon



Habilitation à diriger des recherches



## CONTRIBUTIONS A L'APPROXIMATION NUMERIQUE D'OPERATEURS ET DE LEURS SPECTRES

présentée par Laurence GRAMMONT  
soutenue le 9 mars 2012  
devant le jury

**Mario AHUES** Université de Saint-Etienne  
**Stéphane GAUBERT** INRIA, Ecole Polytechnique  
**Grigory PANASENKO** Université de Saint-Etienne (rapporteur)  
**Paul SABLONNIERE** INSA de Rennes (rapporteur)  
**Miloud SADKANE** Université de Brest (rapporteur)  
**Françoise TISSEUR** Université de Manchester  
**Paulo VASCONCELOS** Université de Porto

## Remerciements

Dans l'imaginaire collectif, on se représente le chercheur en mathématiques se dirigeant, seul, tel un personnage virtuel dans le monde austère de la logique et de l'abstraction. Cette vision ne me semble pas tout à fait juste. Ce que j'ai fait est le produit de rencontres, d'échanges, de discussions, de collaborations, d'expériences mathématiques et humaines. Il est difficile pour moi de parler de toutes ces influences, je n'en évoquerai que quelques unes. Dans ma vie mathématique de tous les jours, Mario Ahues et Alain Largillier ont été beaucoup plus que des soutiens constants. Ils ont toujours été à l'écoute de mes doutes mathématiques qu'ils m'ont aidée à résoudre. Sans leur sempiternel conseil « $\ll$  tu devrais passer ton habilitation  $\gg$ », je crois que je n'y aurai même pas songé.

A quelques milliers de kilomètres de Saint-Etienne, mon second foyer mathématique : l'Indian Institute of Technology de Bombay. Rekha Kulkarni a été mon guide dans le domaine des équations intégrales. Elle m'a aussi expliqué quelle attitude il fallait adopter quand on rencontrait une panthère ou un léopard sur le campus. Balmohan Limaye a été pour moi un exemple de pédagogue. Il m'a aussi fait découvrir la vraie capitale du Maharashtra, Puna, la capitale historique, cité des Peshwas.

Un peu moins exotique, ma collaboration avec l'Université de Manchester a été importante dans mon évolution intellectuelle. J'ai beaucoup appris avec Françoise Tisseur et Nicholas Higham. Ils m'ont fait partager leur vision de l'algèbre linéaire numérique. J'aimerais pouvoir m'inspirer de leur efficacité et de leur productivité étonnantes.

Dans le domaine du calcul scientifique, je dois beaucoup à Filomena d'Almeida qui m'a initiée aux secrets de MATLAB. Je remercie Paulo Vasconcelos dont les conseils d'expert en « $\ll$ computer sciences $\gg$ » m'ont beaucoup aidée. Je me souviens aussi des discussions passionnantes et animées avec Sylvie Champier au sujet des ondelettes.

Miloud Sadkane a accepté d'être rapporteur de ce travail. Ses publications dans le domaine de l'algèbre linéaire m'ont beaucoup inspirée et m'ont permis d'avancer à un moment où mes recherches stagnaient. Je le remercie de ses encouragements.

Je suis reconnaissante à Paul Sablonnière d'avoir accepté de faire un rapport

sur mon travail. Je dois avouer que j'avais une certaine appréhension quand je lui ai envoyé mon mémoire. Il est un maître dans la rigueur rédactionnelle. Ses conseils avisés furent précieux dans la rédaction de mon manuscrit. Je tiens à saluer son travail d'expertise ainsi que celui de Grigory Panasenکو, accomplis après une analyse approfondie de mon travail.

Je suis très honorée par la présence de Stéphane Gaubert dans mon jury. Son enthousiasme pour son sujet de recherche et son désir de le partager rend les discussions scientifiques très enrichissantes.

Enfin, je tiens à remercier mes collègues de l'ISEAG, Michel Bellet, Philippe Solal, Richard Baron, Marie-José Labouré, Marie-Andrée Remontet, Isabelle Fillère, Myriam Normand et j'en oublie pour l'ambiance de travail sereine et amicale, pour l'entraide en toute circonstance, pour avoir contribué à rendre ma tâche d'enseignement intéressante et enrichissante et ainsi avoir facilité mon travail d'habilitation.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Liste des articles présentés</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Préambule</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Algèbre linéaire numérique</b>	<b>13</b>
3.1	Stabilité de Lyapunov . . . . .	13
3.2	Le pseudospectre . . . . .	13
3.3	Le calcul du polynôme caractéristique et ses applications . . .	22
3.4	Le problème polynomial de valeurs propres . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Approximation d'opérateurs intégraux</b>	<b>29</b>
4.1	Equations intégrales linéaires de première espèce . . . . .	29
4.2	Equations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce .	30
4.3	Equations non linéaires . . . . .	32



# Chapitre 1

## Liste des articles présentés

- [1] S. Champier and L. Grammont, Note on the Norm involved in the Definition of the e-spectrum, Appl. Math. Letters, 14 (2001) 393-397.
- [2] S. Champier and L. Grammont, A wavelet-vaguelet method for unfolding sphere size distribution, Inverse Problems, 18 (2002) 79-94.
- [3] L. Grammont and A. Largillier, On-spectra and stability radii, J. Comput. Appl. Math. 147, No 2 (2002), 453-469.
- [4] L. Grammont, Characteristic polynomials and pseudospectra, Linear algebra proceeding <http://www.siam.org/meetings/la03/proceedings> SIAM (2003)
- [5] M. Sadkane and L. Grammont A note on the Lyapunov stability of periodic discrete-time systems, J. Comput. Appl. Math. 176, No 2 (2005), 463-466.
- [6] L. Grammont and A. Largillier, Krylov method revisited with an application to the localization of eigenvalues, Funct. Anal. Optimiz. 27 (5-6), (2006) 1-36.
- [7] L. Grammont and R. Kulkarni, A superconvergent projection method for nonlinear compact operator equations, C. R. Acad. Sci. Paris, 342, No 3 (fev 2006) 215-218.
- [8] L. Grammont, A Mixed Two Grid Method Applied to a Fredholm Equation of the Second Kind, C. Constanda and M.E Pérez (eds) Birkhäuser Boston, Integral Methods in Science and Engineering. vol 2 : Computational Methods (2009) 173-181.
- [9] R.P. Kulkarni, L. Grammont, Extrapolation Using a Modified Projection Method, Funct. Anal. Optimiz., Volume 30, Issue 11-12, (November 2009), 1339-1359.



- [10] L. Grammont, N.J. Higham and F. Tisseur, A Framework for Analyzing Nonlinear Eigenproblems and Parametrized Linear Systems, *Linear Algebra Appl.* 435 (2011) 623-640.
- [11] L. Grammont, A Galerkin's perturbation type method to approximate a fixed point of a compact operator, *International Journal of Pure and Applied Mathematics IJPAM*, vol 69, No. 1 (2011), 1-14.
- [12] L. Grammont, Nonlinear integral equation of the second kind : a new version of Nyström method, soumis à *IMA Journal of Numerical Analysis*.
- [13] L. Grammont, M. Ahues, F.D. D'Almeida, For nonlinear infinite dimensional equations, which to begin with : linearization or discretization ? soumis à *SIAM Journal on Numerical Analysis*.

# Chapitre 2

## Préambule

L'objet de cette introduction est de présenter les thèmes de recherche, leurs problématiques et les résultats obtenus depuis mon recrutement en tant que maître de conférences à l'université de Saint-Etienne en 1996.

Les thèmes de recherche abordés peuvent paraître assez éloignés, tant du point de vue des techniques mathématiques utilisées que du point de vue des communautés scientifiques qui les font avancer. Mes travaux peuvent se diviser en deux thèmes :

- L'algèbre linéaire numérique.
- La théorie des opérateurs intégraux.

Le lien entre ces deux domaines se situe dans le domaine de l'approximation : si l'on ne connaît pas de solution exacte explicite d'une équation d'opérateur, on recherche une approximation de cette solution. Cette recherche aboutit à la résolution d'un système linéaire dont la dimension peut être très grande. On a le même phénomène pour ce qui concerne la recherche d'éléments spectraux d'un opérateur. Si on ne peut pas accéder à ces éléments par la théorie, on fait de l'approximation pour obtenir à la fin un problème spectral en dimension finie dont la résolution est un problème d'algèbre linéaire (conditionnement, stabilité numérique, erreur directe et inverse, algorithmes de résolution).

**L'algèbre linéaire numérique** fut le cadre de ma thèse de doctorat, dédiée aux propriétés spectrales des opérateurs de Sylvester, endomorphismes d'espaces matriciels. J'ai tout naturellement utilisé mes connaissances, mes

compétences et mon savoir faire développés pendant ces années de formation par la recherche pour attaquer un nouveau problème lié à une notion apparue dans les années 1990 et qui a connu un grand succès dans la communauté de l'algèbre linéaire numérique. Cette notion est celle de pseudospectre qui généralise celle de spectre. A cette notion est liée celle de rayon de stabilité. Les pseudospectres peuvent être considérés comme des outils de localisation des valeurs propres. On constate que, pour certaines matrices pathologiques, la détermination du pseudospectre est coûteuse et entachée d'erreurs importantes. Aussi est-il légitime de chercher à construire des ensembles qui localisent le spectre et dont la détermination est aisée (sûre et peu coûteuse). Les ensembles définis comme des  $\epsilon$ -voisinages des racines du polynôme caractéristique sont des candidats à cet emploi. A partir de ceux-ci on peut définir d'autres candidatures liées au polynôme caractéristique. Sur les thèmes abordés ci-dessus, j'ai co-dirigée avec Mario Ahues la thèse de Doctorat de Muzafar HAMA soutenue en avril 2009 sous le titre *Valeurs propres de matrices : localisation par ensembles et triangularisation par des méthodes du type Newton*.

Je me suis ensuite tout naturellement tournée vers un nouveau problème, celui du calcul de valeurs propres de polynôme de matrices. Ce sujet s'est développé très récemment. Les résultats obtenus pour les pseudospectres de matrices ne sont pas généralisables de manière évidente aux cas de pseudospectres de polynômes de matrices. Il y a aussi des questions spécifiques à ces problèmes qui n'ont été posées qu'à partir des années 2000 et qui n'ont trouvé de premières réponses que cinq ans plus tard. Le domaine des problèmes polynomiaux de valeurs propres est en pleine expansion et beaucoup de problèmes restent à résoudre. Je développe une collaboration sur ce sujet avec une équipe de l'université de Manchester dont Nicholas Higham et Françoise Tisseur. J'ai été «external examiner» d'une thèse de doctorat de l'université de Manchester dirigée par Françoise Tisseur et soutenue le 22-08-2005 par Michael Berhanu sous le titre *The polynomial eigenvalue problem*.

Parallèlement et en lien plus direct avec les équations matricielles, je me suis intéressée à la notion de stabilité de Lyapunov, très utile dans la communauté de la théorie du contrôle.

Mon autre domaine de recherche fait partie de la théorie de **l'approximation des opérateurs intégraux**. Si on ne peut pas trouver la ou les solutions exactes d'une équation d'opérateur dans un espace fonctionnel particulier, on cherche une approximation de l'opérateur pour laquelle l'équation

associée à une solution calculable. Cette résolution approchée aboutit alors à un système non linéaire ou linéaire. Si on ne connaît pas les valeurs propres et vecteurs propres d'un opérateur, on cherche une approximation de ceux-ci en utilisant une approximation de l'opérateur initial. On aboutit alors à la recherche d'éléments propres d'une matrice, d'un faisceau de matrices ou d'un polynôme de matrices. Si la matrice intervenant dans ces deux types de problème, est mal conditionnée, on peut améliorer le calcul par des techniques diverses d'algèbre linéaire mais c'est souvent coûteux. On peut alors agir en amont et choisir une autre façon d'approcher l'opérateur initial pour améliorer les résultats. Par exemple, les méthodes de discrétisation conduisant à des matrices diagonales sont particulièrement appréciées. Ces considérations m'ont conduite à étudier l'approximation d'une équation d'opérateur intégral par une méthode d'ondelette vaguelette. La difficulté de la mise en oeuvre numérique m'a dirigée vers l'étude d'autres méthodes. Si l'on s'intéresse à des espaces d'approximation plus classiques tels que les espaces de fonctions polynômiales par morceaux, il existe des méthodes de type projection très performantes. On leur attribue le qualificatif de «superconvergentes». Dans le cadre d'un projet d'Action en Région de Coopération Universitaire Scientifique (ARCUS) avec l'Inde, j'ai collaboré avec une équipe de l'Indian Institute of Technology (I.I.T) de Bombay, dans le but de mettre en place de nouvelles méthodes de projection superconvergentes pour traiter les équations intégrales linéaires et non linéaires. Nous avons exploité les performances de ces méthodes pour proposer une méthode à deux grilles pour calculer l'approximation de Nyström de la solution d'une équation intégrale linéaire à moindre coût. Dans ces travaux, nous obtenons des bornes d'erreur sur l'erreur absolue ou relative entre la solution approchée et la solution exacte. Dans l'idée d'accélérer la convergence par une méthode d'extrapolation, il est intéressant de déterminer un développement asymptotique de la solution approchée. Cela a été réalisé pour cette nouvelle méthode dans le cas d'intégrales régulières. J'ai poursuivi cette collaboration franco-indienne avec un projet CEFIPRA qui nous a permis d'engager un doctorant Hamza Guebbai, sur le sujet des équations de Fredholm de seconde espèce linéaires faiblement singulières et singulières. La dernière partie de ce mémoire contient une section dont le contenu a déjà été présenté dans différentes manifestations scientifiques mais n'a pas encore été publié. Elle est le résultat d'une question très simple. Supposons que l'on ait à approcher la solution exacte d'une équation fonctionnelle non linéaire dans un espace d'approximation dont la dimension ne peut pas dépasser  $n$

pour des raisons de capacité de calcul numérique. Nous avons deux problèmes à traiter : le passage à la dimension finie par la discrétisation de l'équation et la nonlinéarité du problème. On peut choisir de commencer par discrétiser l'équation fonctionnelle non linéaire. On aboutit alors à une équation non linéaire en dimension finie que l'on résout par une méthode de type Newton ou quasi Newton. C'est ce que nous avons fait lors de mon premier travail dans le domaine des équations non linéaires, suivant en cela les modèles proposés par les spécialistes du domaine. Il est naturel de se demander ce qu'il se passe si l'on commence par linéariser l'équation fonctionnelle puis si l'on discrétise l'équation linéaire obtenue. Cette interrogation nous a amené à de très beaux résultats. La réponse à la question dépend du type de discrétisation que l'on envisage. Dans le cas de la méthode de Nyström, le fait de commencer par la linéarisation apporte une amélioration. Si la discrétisation est réalisée par la méthode de Kantorovitch, l'avantage de linéariser en premier est encore plus flagrant.

# Chapitre 3

## Algèbre linéaire numérique

### 3.1 Stabilité de Lyapunov

Article[32]

**A note on the Lyapunov stability of periodic discrete-time systems**  
**Journal of Computational and Applied Mathematics, volume 176,**  
**n2, pp 463-466 (2005)**

Dans ce court article, on caractérise la stabilité des équations de Lyapunov périodiques. Cette caractérisation peut être vue comme l’analogue du théorème classique de stabilité qui traite le cas de coefficients constants. Les quantités qui interviennent dans notre résultat ont l’avantage d’être facilement calculables avec une bonne précision.

### 3.2 Le pseudospectre

Le pseudospectre ou  $\varepsilon$ -spectre est une notion qui, avant d’être popularisée dans les années 90, apparaît de nombreuses fois sous différentes formes : la notion semble avoir été inventée indépendamment au moins cinq fois : Landau (1977), Varah (1979), Godunov et al. (1990, 1991, 1993), Trefethen (1990) Hinrichsen et Kelb (1993) et Hinrichsen et Pritchard (1992). Ce concept est motivé par le calcul numérique de valeurs propres : Les algorithmes efficaces de calcul de valeurs propres débutent souvent par une transformation préalable de la matrice pour la mettre sous une certaine forme. Cette opération se traduit par une série de calculs qui, comme ils sont fait avec une arithmétique à précision finie, sont entachés d’erreur. La matrice sur laquelle

on applique l'algorithme de calcul de valeurs propres est donc une matrice proche de la matrice initiale mais différente. Que représentent alors les valeurs propres de cette matrice ? La question prend toute son importance quand on traite des matrices ayant des défauts de normalité importants. L'analyse de l'erreur inverse des algorithmes de calcul de valeurs propre a montré que les valeurs propres approchées sont en fait les valeurs propres exactes d'une matrice perturbée [40].

C'est là qu'intervient la notion de pseudo valeur propre (terminologie de Landau) ou  $\varepsilon$ -valeur propre. Le pseudospectre de la matrice  $A$  est l'ensemble des pseudo valeurs propres qui sont les valeurs propres de toutes les matrices déduites de  $A$  en ajoutant une perturbation  $\Delta A$  dont la norme est inférieure ou égale à  $\varepsilon$ . Cela donne en écriture mathématique :

$$\Lambda_\varepsilon(A) := \{z \in \mathbb{C} : \exists \Delta A \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ tels que } \|\Delta A\| \leq \varepsilon \text{ et } z \in \Lambda(A + \Delta A)\}.$$

Une première constatation peut être faite : cet ensemble dépend de la norme dont on munit l'espace matriciel considéré. On est dans un espace de dimension finie, donc toutes les normes sont équivalentes. Pourtant le choix de la norme n'est pas anodin. Il donne un ensemble du plan complexe plus ou moins étendu. Pour que cette notion de pseudospectre soit exploitable, il faut pouvoir déterminer cet ensemble du plan et le dessiner. Les techniques de calculs sont de difficultés différentes selon la norme que l'on choisit. L'article qui suit traite de cette question de norme.

#### Article[4]

**Note on the Norm involved in the Definition of the  $\varepsilon$ -spectrum,  
Applied mathematics letters 14 (2001) 393-397**

$A$  désigne une matrice de  $\mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\Lambda(A)$  désigne son spectre,  $\text{re}(A)$  son ensemble résolvant et  $\rho(A)$  son rayon spectral. Il existe plusieurs types de généralisation de la notion de valeur propre : Pour une valeur propre  $\lambda$ ,  $A - \lambda I$  n'est pas inversible. Une valeur propre "généralisée"  $\tilde{\lambda}$  peut être définie comme l'ensemble des nombres complexes tels que la norme de la résolvante de  $A$  en  $\tilde{\lambda}$  est grande (supérieure à  $\frac{1}{\varepsilon}$ ) ou infinie :

$$U_\varepsilon(A) := \{z \in \text{re}(A) : \|(A - zI)^{-1}\| \geq \frac{1}{\varepsilon}\} \cup \Lambda(A).$$

où  $I$  représente la matrice identité.

Pour une valeur propre il existe un vecteur non nul pour lequel le résidu est nul. On peut penser à élargir la définition en définissant une valeur propre "généralisée" comme l'ensemble des nombres complexes pour lesquels le résidu reste petit (inférieur à  $\varepsilon$ ).

$$S_\varepsilon(A) := \{z \in \mathbb{C} : \exists \varphi \in \mathbb{C}^n \text{ s.t. } \|A\varphi - z\varphi\| \leq \varepsilon\}.$$

Dans [33], l'auteur s'intéresse à la qualité de l'approximation d'une méthode de projection comme la méthode d'Arnoldi ou de Lanczos. Elle montre qu'au lieu d'analyser les variations de la norme de la résolvante, on peut étudier les variations du rayon spectral de  $(A - zI)^{-1}E$  où  $E$  est une matrice de perturbation. D'où l'idée dans [4] de définir l'ensemble

$$\sigma_\varepsilon(A) := \{z \in \text{re}(A) : \exists E \in \mathbb{C}^{n \times n}, \|E\| = 1, \rho((A - zI)^{-1}E) \geq \frac{1}{\varepsilon}\} \cup \Lambda(A).$$

On constate que tous ces ensembles dépendent d'une norme de l'espace vectoriel des matrices. Dans l'article, nous avons montré que pour toute norme matricielle de  $\mathbb{C}^{n \times n}$  induite par une norme de l'espace vectoriel  $\mathbb{C}^n$ , les quatre définitions sont équivalentes. Pour la norme de Frobenius qui n'est pas une norme subordonnée à une norme de  $\mathbb{C}^n$ , il n'y a pas forcément égalité entre ces différents ensembles.

La norme la plus utilisée pour déterminer le pseudo spectre est la norme spectrale :  $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$ ,  $A^*$  étant la transposée conjuguée de  $A$  (voir [37] pour l'histoire). Elle a l'avantage de donner la définition suivante du pseudospectre :

$$(3.1) \quad \Lambda_\varepsilon(A) := \{z \in \text{re}(A) : \sigma_{\min}(A - zI) \leq \varepsilon\} \cup \Lambda(A),$$

où  $\sigma_{\min}$  désigne la plus petite valeur singulière. On comprend bien l'intérêt numérique de cette définition. Dans la littérature dédiée au calcul du pseudospectre, on ne trouve qu'un article [18] qui n'utilise pas cette norme spectrale pour dessiner le pseudospectre.

Dans notre travail [4], nous montrons pourquoi, outre sa facilité de calcul, on se focalise sur cette norme. Comme l'explique très clairement Trefethen, pour les matrices normales ( $A^*A = AA^*$ ), les valeurs propres et les vecteurs propres permettent de prédire le comportement asymptotique de  $\|e^{tA}\|$  quand  $t \rightarrow +\infty$  ou de  $\|A^n\|$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Par contre ils deviennent un outil imparfait quand on considère des matrices ayant un fort défaut de



normalité, surtout dans les situations où le comportement transitoire diffère substantiellement du comportement asymptotique. Dans ces applications, le pseudospectre est un indicateur plus intéressant. Ces propos nous amènent à de nouvelles considérations sur la norme qui intervient dans la définition du pseudospectre. Il est important que le pseudospectre d'une matrice normale soit proche du spectre. Il est assez raisonnable de proposer que le pseudospectre d'une matrice normale  $A$  soit la réunion des boules centrées en les valeurs propres de  $A$  et de rayon  $\varepsilon$ . On montre que cette propriété est vérifiée pour les normes qui sont unitairement invariantes.

La norme spectrale est à la fois subordonnée à une norme de l'espace  $\mathbb{C}^n$  et unitairement invariante. C'est pourquoi, la plupart des applications du pseudospectre se font en choisissant cette norme.

Après ces considérations relatives aux différentes définitions du pseudospectre et de leur significations respectives, on s'intéresse à la détermination de ce sous-ensemble de  $\mathbb{C}$ . On choisit bien sûr la norme spectrale, de sorte que l'on puisse utiliser la définition (3.1). Cette définition fournit un excellent moyen de calcul quand la matrice est de petite taille. On utilise l'algorithme standard de décomposition en valeurs singulières aux points d'un maillage du plan complexe. Quand la matrice est de grande taille, cet algorithme est trop coûteux. On utilise des méthodes de projection sur des espaces de dimensions plus petites (voir [37]). C'est la problématique de l'article suivant.

#### Article[9]

**On-spectra and stability radii** *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Volume 147, Issue 2 15 October 2002 Pages 453-469

Pour de grandes matrices  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , on utilise des méthodes de type sous-espace de Krylov pour approcher le pseudospectre. Le fabuleux outil qu'est EIGTOOL développé par Trefethen et Wright utilise ce type de méthode. Les méthodes du type sous-espace de Krylov déterminent les matrices  $A_{11} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ,  $m < n$ , et  $V_1 \in \mathbb{C}^{n \times m}$  telles que  $AV_1 = V_1A_{11} + R_1$ .

Si on utilise la partition suivante de la matrice  $A$  :  $A := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ , où  $A_{11} \in \mathbb{C}^{m \times m}$  et  $A_{22} \in \mathbb{C}^{n-m \times n-m}$ ,

on peut écrire

$$A = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix}^* + R = A_0 + R.$$

La décomposition par blocs précédente conduit naturellement à approcher le pseudospectre de  $A$  par ceux des blocs  $A_{11}$  et  $A_{22}$  comme on le fait pour le calcul approché des valeurs propres. L'objectif de l'article est d'étudier la qualité de cette approximation. On démontre le résultat suivant :

**Théorème 1**

$$\Lambda_\varepsilon(A) \subset \Lambda_{\tau(\varepsilon)}(A_{11}) \cup \Lambda_{\tau(\varepsilon)}A_{22},$$

où

$$\tau(\varepsilon) = (\varepsilon + \|A_{21}\|) \sqrt{1 + \frac{\|A_{12}\|}{\varepsilon + \|A_{21}\|}}.$$

Nous présentons des résultats numériques avec des matrices "pathologiques" de la bibliothèque test matrix toolbox for matlab [19]. Ils nous confirment la finesse de l'approximation.

Ces méthodes du type sous-espace de Krylov sont aussi utilisées pour déterminer le rayon de stabilité de matrices de grande taille. Une matrice est dite stable si et seulement si toutes ses valeurs propres ont une partie réelle négative. Cette notion est importante pour étudier le comportement asymptotique ou les propriétés d'équilibre de systèmes d'équations différentielles. Elle est particulièrement étudiée dans le domaine de la théorie du contrôle. Le rayon de stabilité d'une matrice  $A$ , notée  $rs(A)$ , mesure la distance entre une matrice stable et l'ensemble des matrices instables. Sa définition mathématique est la suivante :

$$rs(A) = \min_{re(z)=0} \sigma_{\min}(A - zI) = \frac{1}{\max_{re(z)=0} \|(A - zI)^{-1}\|_2}.$$

où  $\|\cdot\|_2$  est la norme spectrale et  $re$  désigne la partie réelle d'un nombre complexe. Le défi est ici de minorer le rayon de stabilité d'une matrice  $A$  à l'aide du rayon de stabilité de sous matrices et de quantités aisément calculables. On pourra également proposer des conditions suffisantes de stabilité d'une matrice mettant en jeu des quantités dont le calcul n'est pas trop coûteux. Nous obtenons le résultat suivant : Si  $\mu$  désigne la plus petite valeur propre de la matrice  $-\frac{A_{22} + A_{22}^*}{2}$ ,  $s_1$  le rayon de stabilité de la matrice  $A_{11}$ ,  $s =$

$\max(s_1, \mu) a_{12} = \|A_{12}\|_2$ ,  $a_{21} = \|A_{21}\|_2$  et  $A_0 = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix}^*$  avec  $\begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix}$  unitaire, on a

**Théorème 2** *Si  $A_{11}$  est instable, alors  $A_0$  est instable et*

$$rs(A) \leq a_{21}$$

*Si  $A_{11}$  est stable et  $\frac{A_{22} + A_{22}^*}{2}$  est définie négative, alors*

$$rs(A_0) \geq \min(s_1, \mu) \frac{s}{\sqrt{s^2 + \frac{a_{12}^2}{2} + \frac{a_{12}}{2} \sqrt{4s^2 + a_{12}^2}}}$$

*Si de plus  $a_{21} < \min(s_1, \mu) \frac{s}{\sqrt{s^2 + \frac{a_{12}^2}{2} + \frac{a_{12}}{2} \sqrt{4s^2 + a_{12}^2}}}$ , alors  $A$  est stable et*

$$rs(A) \geq \min(s_1, \mu) \frac{s}{\sqrt{s^2 + \frac{a_{12}^2}{2} + \frac{a_{12}}{2} \sqrt{4s^2 + a_{12}^2}}} - a_{21}$$

On a testé cette borne sur la discrétisation du l'opérateur de Orr-Sommerfeld et on a constaté une meilleure estimation du rayon de stabilité que dans l'article [29].

Comme l'exprime R. Erra dans l'introduction de sa thèse de doctorat [8], au cours du 19-ème siècle la quasi totalité des techniques de calcul et de localisation des valeurs propres passait par le polynôme caractéristique. Ce n'est que bien après les travaux de Sylvester (1814-1897) et Cayley (1821-1895) que l'on calcule les valeurs propres d'une matrice sans passer par le polynôme caractéristique. Dans la communauté de l'algèbre linéaire numérique actuelle, on a un point de vue tout à fait opposé : on considère que l'équivalence entre valeurs propres d'une matrice et zéros d'un polynôme n'a plus d'importance pour le calcul des valeurs propres. La raison en est que le calcul du polynôme caractéristique est considéré comme instable. Il n'en reste pas moins que certains algorithmes de calcul de valeurs propres peuvent s'exprimer comme

une méthode de calcul des zéros de son polynôme caractéristique. Dans sa thèse, Robert Erra [8] donne l'exemple de la méthode QR -la méthode la plus populaire de calcul de valeurs propres- qui se trouve être une interprétation matricielle de la méthode QD, méthode de calcul des zéros d'un polynôme. Cette vision double d'un même objet peut s'étendre à l'analyse de la sensibilité de cet objet. Le pseudospectre est un outil mis en place pour donner des informations sur la sensibilité des valeurs propres d'une matrice alors que la notion d'ensemble de pseudo zéros d'un polynôme permet d'avoir une idée sur la sensibilité des zéros d'un polynôme. C'est la raison pour laquelle, on a jugé intéressant de comparer les deux ensembles.

Dans [31], Mosier définit la notion de "root neighborhoods" d'un polynôme  $p$ , que l'on peut traduire par voisinages de racines. Ce sont les composantes connexes de l'ensemble des zéros de tous les polynômes obtenus par une perturbation des coefficients de  $p$  d'une taille inférieure à  $\varepsilon$ ,

$$Z(p, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : \exists q \in \mathcal{P}_n, q(z) = 0 \text{ et } \|p - q\| \leq \varepsilon\},$$

où  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $\mathcal{P}_n$  qui mesure les perturbations des coefficients de  $p$ ,  $\mathcal{P}_n$  étant l'ensemble des polynômes moniques de degré inférieur ou égal à  $n$ . Cet ensemble est utilisé pour donner des informations sur la sensibilité des racines de  $p$ . Dans [36], les auteurs Toh et Trefethen, appellent cet ensemble  $Z(p, \varepsilon)$  l'ensemble des  $\varepsilon$ -pseudozéros de  $p$ . Dans leur article [36], Toh et Trefethen suggèrent que l'ensemble des pseudozéros  $Z(p, \varepsilon)$  d'un polynôme et le pseudospectre  $\Delta_\varepsilon(A)$  de la matrice compagnon associée à ce polynôme sont proches en général, assez proches pour que l'on puisse calculer les zéros de ce polynôme de manière stable via le calcul des valeurs propres de la matrice compagnon associée préalablement équilibrée. Autrement dit, les auteurs comparent la sensibilité des racines d'un polynôme avec celle des valeurs propres de la matrice compagnon associée. On peut aborder les choses d'un point de vue inverse et se demander quel est le lien entre le pseudospectre d'une matrice et l'ensemble des pseudozéros de son polynôme caractéristique. C'est l'objet de l'article suivant qui est un proceeding à comité de lecture d'une conférence de la SIAM et de fait ne pouvait pas être publié ailleurs.

**Article[10]**

**Characteristic polynomials and pseudospectra**

**Linear algebra proceeding** <http://www.siam.org/meetings/la03/proceedings>

Dans [36], Toh et Trefethen donnent une caractérisation algébrique de l'ensemble de  $\varepsilon$ -pseudozéros de  $p$  : Si on choisit la norme  $\|p\| = (\sum_{i=1}^n |a_i|)^{\frac{1}{2}}$  où  $p(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i \forall x \in \mathbb{R}$ , alors

$$Z(p, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : \frac{|p(z)|}{\sqrt{1 + |z|^2 + |z^2|^2 + \dots + |z^{n-1}|^2}} \leq \varepsilon\}.$$

Ainsi il est intéressant de définir l'ensemble  $L(p, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}, |p(z)| \leq \varepsilon\}$  en raison de la facilité de sa détermination numérique.

L'objectif de l'article est de comparer le pseudospectre d'une matrice quelconque  $A$ ,  $\Delta_\varepsilon(A)$  avec  $L(p, \varepsilon)$ .

Dans la suite, on utilise les notations suivantes :

- $\|\cdot\|_2$  désigne la norme spectrale,  $\|A\|_2 = \rho(A^*A)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\rho$  étant le rayon spectral.
- $\Lambda$  désigne le spectre.
- $\Lambda(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  avec  $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_k|$ .
- $P_i$  désigne la projection spectrale associée à  $\lambda_i$ .
- $m_i$  désigne la multiplicité algébrique de  $\lambda_i$  et  $l_i$  son indice.
- Pour toute matrice inversible  $A$ , son nombre de conditionnement pour la norme spectrale est  $k_2(A) = \|A^{-1}\|_2 \|A\|_2$ .

Dans cet article, on fixe la norme pour définir le pseudospectre : on a choisi la norme spectrale comme le suggère notre travail [4]. On suppose que  $A$  est une matrice de Hessenberg supérieure irréductible. On obtient très facilement l'inclusion suivante :

### **Théorème 3**

$$L(p, \varepsilon) \subset Z(p, \varepsilon) \subset \Lambda_{k_2(C)\varepsilon}(A)$$

où  $C = [e_1, Ae_1, \dots, A^{n-1}e_1]$  et  $k_2(C) = \|C\|_2 \|C^{-1}\|_2$ .

Nous proposons ensuite un résultat d'inclusion entre  $\Lambda_\varepsilon(A)$  et  $L_p(\varepsilon)$  quand  $p$  est le polynôme caractéristique. On présente deux inclusions différentes basées sur des techniques mathématiques différentes. La première inclusion utilise un résultat concernant le conditionnement des valeurs propres et le deuxième un résultat de perturbation de Elderman et Murakami [7].

### **Théorème 4** Avec

$$M = \max\{m_i \mid i = 1, \dots, k\},$$

$m = \min\{m_i \mid i = 1, \dots, k\},$   
 $r = \min\{\frac{m_j}{l_j} \mid i = 1, \dots, k\} \ (r > 1), \ l_j \text{ étant l'indice de la valeur propre } \lambda_j,$   
 $\gamma(A) = \max\{|\lambda_i - \lambda_j| \mid i \neq j\},$   
 $V_j \text{ la base de Jordan associée à } \lambda_j,$

$$\Lambda_\varepsilon(A) \subset L(p, \varepsilon'),$$

où  $\varepsilon' = (K \max(\gamma(A)^n, \gamma(A)^{n-M})) \varepsilon^r + 0(\varepsilon^r)$  avec

$$K = \max\{(l_j k_2(V_j) \|P_j\|_2)^{\frac{m_j}{l_j}}, \ j = 1, \dots, k\}.$$

### Théorème 5

$$\Lambda_\varepsilon(A) \subset L(p, \varepsilon'),$$

$$\text{avec } \varepsilon' = \left( \sqrt{n+1} n^{3/2} k_2(C) \sum_{k=1}^n \|p\|^k \right) \varepsilon.$$

Avant de présenter des résultats numériques en vue d'illustrer ces inclusions, il est nécessaire d'expliquer comment on calcule le polynôme caractéristique d'une matrice. On utilise la méthode de Krylov : Si  $A$  est une matrice de  $\mathbb{C}^{n \times n}$  et  $u \in \mathbb{C}^n$  est tel que  $C = [u, \dots, A^{n-1}u]$  est inversible, Si  $\alpha = (a_0, \dots, a_{n-1})^t$  est la solution du système linéaire

$$C\alpha = -A^n u$$

alors le polynôme caractéristique est  $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + x^n$ .

Pour avoir une idée des facteurs néfastes à la précision de la détermination de  $p$ , nous avons étudié les effets de l'arithmétique à précision finie sur la méthode. C'est ce qu'on appelle la Backward error ou erreur inverse. Le résultat que nous obtenons n'est pas très intéressant en lui-même. Il montre simplement que la norme de la matrice de départ  $A$  est un facteur essentiel. Si  $\|A\| \gg 1$  alors l'erreur sur le calcul du polynôme  $p$  est énorme. Il est donc nécessaire d'appliquer en amont à la matrice un processus de mise à l'échelle.

L'inclusion du théorème 4 n'est pas optimale. Son intérêt est limité. Elle montre que si les valeurs propres de  $A$  sont mal conditionnées alors l'écart entre les ensembles  $\Lambda_\varepsilon(A)$  et  $L_p(\varepsilon)$  est grand. Le théorème 4 montre que l'écart entre les ensembles dépend du conditionnement de la matrice  $C$  ce qui suggère d'étudier plus en détails le conditionnement de cette matrice de Krylov.

### 3.3 Le calcul du polynôme caractéristique et ses applications

Article[32]

**Krylov method revisited with an application to the localization of eigenvalues, Numerical Functional Analysis and Optimization, 27(5-6) :1-36 (2006)**

Lors du travail précédent, pour illustrer nos bornes, nous avons étudié et mis en pratique le calcul du polynôme caractéristique d'une matrice par la méthode de Krylov. En étudiant le conditionnement de cette méthode ainsi que sa backward erreur, nous avons pu mettre en évidence les cas pour lesquels il n'était pas envisageable d'appliquer la méthode telle quelle.

On supposera que  $A$  est une matrice de Hessenberg supérieure irréductible. On pose

$$C = [e_1, \dots, A^{n-1}e_1],$$

$e_1$  étant le premier vecteur de la base canonique. Nous avons facilement le résultat suivant :

#### Proposition 1

$$k_2(C) \leq \frac{\|C\|_2^{n+1}}{\prod_{k=2}^{n+1} |A(k, k-1)|}.$$

Cette proposition montre que si les coefficients  $|A(k, k-1)|$  sont assez grands comparés avec la norme de la matrice de Krylov  $C$ , alors  $k_2(C)$  reste modérée. Par contre si un des coefficients  $|A(k, k-1)|$  est proche de zéro, la matrice est proche d'une matrice dérogatoire, et la matrice de Krylov peut-être mal conditionnée. Pour palier ce problème, nous proposons de modifier la méthode de Krylov en ajoutant une étape de déflation quand la matrice s'approche dangereusement d'une matrice dérogatoire. Nous proposons un exemple pour illustrer notre variante de la méthode de Krylov pour calculer les coefficients du polynôme caractéristique dans la base des monômes canoniques.

The Godunov matrix of order 7

### 3.3. LE CALCUL DU POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE ET SES APPLICATIONS 23

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 2048 & 256 & 128 & 64 & 32 & 16 \\ 0 & -2 & 1024 & 512 & 256 & 128 & 32 \\ 0 & 0 & 4 & 512 & 1024 & 256 & 64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 512 & 512 & 128 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1024 & 256 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2048 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$A := B^{-1}TB.$$

$A$  est appelée matrice de Godunov. Dans le tableau suivant, on compare les coefficients exacts du polynôme caractéristique avec les coefficients calculés par la routine `poly(A)` de MATLAB :

Exact	Computed with <code>poly(A)</code>
1	1.0000000000000000e + 00
0	-1.865174681370263e - 14
-21	-2.1000000000001373e + 01
0	2.540445080967402e - 06
84	8.400130670814428e + 01
0	2.399676211825863e - 01
-64	1.206006977243418e + 03
0	2.315434554167661e + 05

Pour cette matrice la fonction `poly` de MATLAB donne de mauvais résultats.

Si on transforme la matrice  $A$  en une matrice de Hessenberg supérieure



avec la routine Hess de MATLAB, on tombe sur

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 2.89 + 02 & -9.02 + 02 & -1.26 + 02 & 4.70e + 02 & 1.20 + 03 & -5.80 + 02 & 1.2 + 03 \\ -2.74 + 03 & 3.71 + 02 & 1.72 + 03 & 3.31 + 02 & -3.87 + 02 & 5.03 + 02 & -1.49 + 03 \\ & -1.02 + 03 & 2.13 + 02 & 1.33 + 03 & 2.23 + 03 & -9.35 + 02 & -2.49 + 03 \\ & & 3.92 + 02 & 5.03 + 02 & 1.27e + 03 & -3.75 + 02 & 7.48 + 02 \\ & & & -1.74 + 03 & -1.19 + 03 & 7.73 + 02 & -7.64 + 02 \\ & & & & -1.45 + 00 & -1.82 + 02 & -1.39 + 03 \\ & & & & & -4.69 - 11 & -1 + 00 \end{bmatrix}.$$

Il est a priori risqué d'appliquer la méthode de Krylov sur cette matrice du fait de la petitesse du coefficient  $|H(7, 6)|$ . Si on calcul les coefficients du polynôme caractéristique par la méthode de Krylov, on trouve :

Computed	Exact
1.0000000000000000e + 00	1
1.737545768532496e - 13	0
-2.0999999999937725e + 01	-21
5.196976992854343e - 06	0
8.400308001070536e + 01	84
3.115525551493273e + 00	0
3.325551493898983e + 03	-64
5.3984000000000000e + 05	0

On a  $k_2(C) > 4.2e + 16$ , cela explique les mauvais résultats.

Notre borne d'erreur suggère que si l'on fait une déflation avant d'appliquer la méthode de Krylov à une sous matrice, on pourra obtenir des résultats corrects.

(1) **Première déflation de** of  $H$   $H_1 = H(1 : 6, 1 : 6)$ .

(2) **Isolation de la valeur propre nulle**  $[Q, R] = qr(H_1)$   $H_2 = R * Q$ .

$$H_2 = \begin{bmatrix} 7.50e + 02 & 4.00e + 02 & -1.01e + 03 & 1.07e + 03 & -1.18e + 02 & 2.91e + 03 \\ 1.32e + 03 & 6.22e + 01 & 1.36e + 03 & 2.42e + 03 & 1.00e + 03 & -1.28e + 02 \\ & 3.09e + 02 & 6.44e + 02 & 1.31e + 03 & 4.86e + 02 & -2.64e + 02 \\ & & -1.73e + 03 & -1.27e + 03 & -7.17e + 02 & -3.53e + 02 \\ & & & 1.46e + 00 & -1.82e + 02 & -4.37e + 01 \\ & & & & 8.48e - 10 & 2.02e - 10 \end{bmatrix}.$$

(3) **Seconde Deflation**  $H_3 = H_2(1 : 5, 1 : 5)$

(4) **Calcul du polynôme caractéristique**

### 3.3. LE CALCUL DU POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE ET SES APPLICATIONS 25

(4-1) Calcul de  $p_3$ , le polynôme caractéristique de  $H_3$ .

(4-2)  $p_A(x) = p_3(x) * (x + 1) * x$ .

Les résultats sont :

Computed	Exact
$1.000000000000000e + 00$	1
$-1.608637667516177e - 10$	0
$-2.099999996818809e + 01$	-21
$-1.236906832957629e - 06$	0
$8.400426426354275e + 01$	84
$3.436980464867730e + 00$	0
$-6.056728506755462e + 01$	-64
$0.000000000000000e + 00$	0

Dans notre article, nous proposons une étude du conditionnement plus poussée. La démarche est hautement technique et les résultats difficiles à apprécier de par la complexité de leur écriture. On omettra leur synthèse ici. On peut dire que si la base de Jordan est bien conditionnée, si la norme de  $A$  et son rayon spectral sont inférieur à 1, si  $\beta(A) = \min_{\lambda_i \neq \lambda_j \in \Lambda(A)} |\lambda_i - \lambda_j|$  n'est pas trop petit, alors le conditionnement a des chances de ne pas être trop mauvais.

Si l'on part d'une matrice  $A$  de norme inférieure à 1, que l'on transforme en une matrice de Hessenberg (l'algorithme est stable) et que l'on fait une déflation dès qu'un des coefficients de la sous diagonale est trop petit, alors les coefficients du polynôme caractéristique sont en général bien calculés. On peut citer le travail [30] de Misra, Quintana et Van Dooren. Ces auteurs proposent un algorithme qui calcule de manière stable les coefficients du polynôme caractéristique. Mais il requiert la résolution de  $n + 1$  systèmes linéaires, alors que notre méthode requiert la résolution d'un seul système linéaire.

Maintenant que nous avons des algorithmes qui calculent les coefficients du polynôme caractéristique avec précision, nous pouvons comparer numériquement le pseudospectre d'une matrice avec  $L(p, \epsilon)$ . Nous le faisons avec des matrices particulières qui sont issues de la collection de [19]. Nous remarquons sur ces exemples numériques que  $L(p, \epsilon)$  est bien plus petit que  $\Lambda_\epsilon(A)$  et on peut se demander si cet ensemble  $L(p, \epsilon)$  n'est pas un outil intéressant pour localiser les zéros d'un polynôme.

### 3.4 Le problème polynomial de valeurs propres

Dans un souci de généralisation de mes travaux, je me suis intéressée au problème polynomial de valeurs propres. Le problème s'énonce de la manière suivante : Etant données des matrices  $A_j \in \mathbb{C}^{n \times n}$  pour  $j = 1, \dots, \ell$ , un polynôme matriciel de degré  $\ell$  est une fonction définie sur l'ensemble des nombres complexes de la forme

$$P(\lambda) = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda^j A_j.$$

Le problème polynomial de valeur propre, appelé PEP (Polynomial Eigenvalue Problem) consiste à trouver les complexes  $\lambda \in \mathbb{C}$  et des vecteurs  $x$  et  $y$  non nuls de  $\mathbb{R}^n$  satisfaisant

$$(3.2) \quad P(\lambda)x = 0, \quad y^*P(\lambda) = 0$$

$x$  et  $y$  sont des vecteurs propres à droite et à gauche correspondant à  $\lambda$ . On peut aussi envisager le problème de la résolution du système linéaire

$$(3.3) \quad P(\omega)x = b, \quad \omega \in \mathbb{C}$$

où  $x \in \mathbb{C}^n$  et  $b \in \mathbb{C}^n$ , pour de nombreuses valeurs du paramètre  $\omega$ .

#### Article [14]

Le problème polynomial de valeurs propres (3.2) ou le problème du système linéaire paramétrisé (3.3) peuvent être résolus en les transformant en des problèmes linéaires équivalents mais de taille  $\ell n \times \ell n$  :

$$(3.4) \quad L(\lambda)z = 0, \quad w^*L(\lambda) = 0,$$

$$(3.5) \quad L(\omega)z = c$$

où  $z, c \in \mathbb{C}^{\ell n}$  et  $L(\lambda) = \lambda X + Y$  où  $X, Y \in \mathbb{C}^{\ell n \times \ell n}$ . (3.4) est un problème généralisé de valeurs propres que l'on peut résoudre par des méthodes numériques

standards. (3.5) est un système linéaire paramétré de grande taille avec une structure particulière.

Jusqu'à maintenant, on traitait cette conversion dans un cadre mathématique précis, celui de la linéarisation : On dit que  $L(\lambda)$  est une linéarisation de  $P$  si et seulement si il existe deux polynômes matriciels  $E(\lambda)$  et  $F(\lambda)$  de  $\mathbb{C}^{\ell n \times \ell n}$ , de déterminant constant non nul, tels que

$$E(\lambda)L(\lambda)F(\lambda) = \begin{bmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{\ell(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Les linéarisations les plus connues sont les formes compagnons : associés à  $P$  les deux faisceaux compagnons sont,  $C_1(\lambda) = \lambda X_1 + Y_1$  and  $C_2(\lambda) = \lambda X_2 + Y_2$ , appelés respectivement la première forme compagnon et la deuxième forme compagnon, où

$$X_1 = X_2 = \text{diag}(A_\ell, I_n, \dots, I_n)$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} A_{\ell-1} & A_{\ell-2} & \dots & A_0 \\ -I_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -I_n & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} A_{\ell-1} & -I_n & \dots & 0 \\ A_{\ell-2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -I_n \\ A_0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Il existe d'autres types de linéarisation. Il existe une infinité de linéarisations qui ont des propriétés variées. L'article [27] représente une grande avancée pour le problème polynomial de valeurs propres. Les auteurs Mackey, Mackey, Mehl et Mehrmann développent une approche systématique pour générer une large classe de linéarisations. La manière de linéariser le problème polynomial a un impact sur la qualité numérique de la solution approchée.

Dans notre article, nous développons un cadre dans lequel une version plus générale des deux problèmes (3.2) et (3.3) est analysée. Ce cadre est la notion

de factorisation d'un seul coté «one-sided factorization» qui remplace celle de linéarisation. Notre analyse relie les solutions des problèmes originels à celles des problèmes transformés. En particulier pour le problèmes des valeurs propres, ce cadre inclue les cas spéciaux des espaces vectoriels des faisceaux  $L_1(P)$  et  $L_2(P)$  introduits par Mackey, Mackey, Mehl et Mehrmann dans [27]. On utilise ce même cadre pour étudier le conditionnement et la stabilité des systèmes linéaires paramétrés (3.3). On étudie aussi l'effet d'un changement d'échelle sur le problème originel et sur le problème transformé. On identifie les situations pour lesquelles ce changement d'échelle peut potentiellement améliorer de manière importante le conditionnement et la stabilité.

# Chapitre 4

## Approximation d'opérateurs intégraux

La suite de ce mémoire propose différentes manières d'approcher la solution d'une équation d'opérateur. L'opérateur est un opérateur intégral, linéaire ou non linéaire. Dans une première partie, on traitera le cas d'une équation linéaire de Fredholm de première espèce. Ensuite, on s'intéressera aux équations linéaires de Fredholm de deuxième espèce. La dernière partie sera dédiée aux opérateurs non linéaires.

### 4.1 Equations intégrales linéaires de première espèce

Article[5]

**A wavelet-vaguelet method for unfolding sphere size distribution, Inverse Problem 18 (2002) p79-94**

Ma première approche de la théorie des opérateurs intégraux s'est faite avec le problème classique de Wicksell qui est d'estimer une fonction densité de probabilité inconnue. Ce problème débouche sur une équation intégrale de première espèce qui se révèle être mal posée. On propose dans l'article une méthode de régularisation reposant sur une décomposition en ondelettes-vaguelettes. A notre connaissance, ce type de décomposition a été proposé pour la première fois par Donoho dans un preprint de 1995 [6]. Pour que la formulation soit simple, on transforme le problème de Wicksell en une

équation intégrale mettant en jeu un opérateur de convolution. On construit un estimateur de la solution en donnant des conditions suffisantes sur l'ondelette mère qui se trouve par conséquent différente de celle choisie par Donoho. On montre que la décomposition en ondelettes-vaguelette avec notre choix d'ondelette mère permet de diagonaliser l'opérateur intégral lors de la discrétisation. On propose une estimation de la sensibilité de la solution par rapport à une perturbation des données. Ainsi, on montre que l'utilisation d'un type approprié d'ondelettes-vaguelettes permet de traiter une équation intégrale de première espèce mal posée et qui, de plus, a des données bruitées.

## 4.2 Equations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce

Un projet franco-indien financé par la région Rhône-Alpes et le ministère des affaires étrangères m'a donné l'occasion de collaborer avec des chercheurs de l'Indian Institute of Technology de Bombay. Notre travail portait sur les équations intégrales linéaires de seconde espèce. Comme il a été dit dans le préambule, la difficulté de la mise en oeuvre numérique des méthodes d'ondelettes m'ont poussée vers des espaces d'approximation plus classiques : les espaces des fonctions polynomiales par morceaux.

**Article[12]**

**A Mixed Two Grid Method Applied to a Fredholm Equation of the Second Kind**

**C. Constanda and M.E Pérez (eds) Integral Methods in Science and Engineering. vol 2 : Computational Methods (2009) p173-181**

Le propos de cet article est de calculer à bas coût une approximation de la solution d'une équation de Fredholm de deuxième espèce à une précision donnée  $n$ . Plus précisément on étudie l'opérateur intégral régulier  $T$  défini par

$$Tu(s) = \int_0^1 k(s, t)u(t)dt,$$

où  $k \in C^{2m}([0, 1] \times [0, 1])$  et  $m \leq 1$

L'équation que l'on considère est :

$$(4.1) \quad u - Tu = f$$

où  $f \in C^m[0, 1]$ .

La méthode de Nyström consiste à approcher l'opérateur  $T$  par un opérateur  $T_n$  obtenu en remplaçant l'intégrale par une formule de quadrature :

$$T_n(x)(s) = \sum_{j=1}^n \omega_{n,j} k(s, t_{n,j}) x(t_{n,j}), \quad s \in [0, 1].$$

La méthode de Nyström d'ordre  $n$  fournit une approximation  $u_n$  de la solution exacte  $u$  dont l'erreur a la forme  $\|u - u_n\|_0 = O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^m\right)$  où  $\|\cdot\|_0$  est la norme du max sur  $C^0$ . (voir théorème 2.1 pp 98 dans [38]).

Cette méthode conduit à la résolution d'un système linéaire qui demande  $O(n^3)$  opérations.

Dans [38], Vainikko montre que l'on peut réduire le coût à  $O(n^2)$  en utilisant une méthode de quadrature à deux grilles. Une deuxième étape permet à Vainikko de réduire le coût de calcul à  $O(n)$ , en utilisant une approximation moins coûteuse du noyau  $k$ . Vainikko montre que ces deux étapes permettent de gagner en coût sans pour autant augmenter l'ordre d'erreur de la méthode. Dans ce papier, on se propose d'appliquer une méthode à deux grilles plus performante, basée sur la méthode de projection modifiée présentée par R. Kulkarni dans [23] ou [24].

#### Article[13]

##### Extrapolation Using a Modified Projection Method

**Numer. Funct. Anal. and Optimiz, Volume 30, Issue 11, 12, November 2009 , pages 1339 - 1359**

Dans l'article [23], R. Kulkarni propose une nouvelle méthode de projection sur un espace polynomial par morceaux de degré  $\leq r - 1$  ayant un ordre de convergence de  $4r$ . Dans les article [26], les auteurs montrent comment on peut améliorer l'ordre de convergence en utilisant une méthode d'extrapolation. Pour l'appliquer, il faut pouvoir établir un développement asymptotique de la solution approchée.

Dans ce papier, on montre que la solution approchée obtenue par la méthode de projection modifiée de Kulkarni [23] possède un développement asymptotique qui reste valide pour la version discrète de la méthode. On peut ainsi utiliser l'extrapolation de Richardson pour améliorer l'ordre de convergence pour l'élever à  $4r + 2$ .



### 4.3 Equations non linéaires

Article[12]

A superconvergent projection method for nonlinear compact operator equations C. R. Acad. Sci. Paris volume 342, n3, pp 215-218 (fev 2006)

Article[15]

A Galerkin's perturbation type method to approximate a fixed point of a compact operator  
International Journal of Pure and Applied Mathematics IJPAM, vol. 69, No. 1 (2011).

On se propose d'étudier une équation non linéaire du type point fixe

$$x = \mathcal{K}(x)$$

où  $K$  est un opérateur non linéaire compact et différentiable. La méthode classique de Galerkin consiste à résoudre cette équation dans un espace d'approximation de dimension finie  $\mathcal{X}_n$  :

$$(4.2) \quad x_n^G = P_n \mathcal{K}(x_n^G).$$

Cette méthode a été analysée par Krasnosel'skii dans [22]. Il a été prouvé que, si  $x^*$  est un point fixe isolé, alors, pour un  $n$  assez grand, l'équation (4.2) a au moins une solution  $x_n^G \in \mathcal{X}_n \cap \mathcal{O}$  telle que  $\|x_n^G - x^*\|$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ . Avec des conditions supplémentaires sur  $\mathcal{K}$ , la solution de (4.2) est unique et le taux de convergence de  $x_n^G$  vers  $x^*$  est le même que celui de  $P_n x^*$  vers  $x^*$ .

Dans [2], Atkinson et Potra étudient la méthode de Galerkin itérée donnée par

$$(4.3) \quad x_n^S = \mathcal{K}(x_n^G).$$

Cette approximation a été introduite par Sloan pour les équations linéaires [34] et [35]. Si  $\mathcal{X}$  est un espace de Hilbert et  $P_n$  la projection orthogonale, les auteurs de [2] montrent que  $x_n^S$  est superconvergente vers  $x^*$  dans le sens suivant :

$$\frac{\|x_n^S - x^*\|}{\|P_n x^* - x^*\|} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Pour des projections générales  $P_n$ , la méthode de Galerkin itérée est superconvergente si et seulement si

$$(4.4) \quad \frac{\|DK(x^*)(I - P_n)x^*\|}{\|(I - P_n)x^*\|} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

On propose dans ces articles une nouvelle méthode de projection pour approcher le point fixe  $x^*$ . Cette méthode s'inspire de la méthode de projection modifiée de [23]. Elle présente un grand avantage par rapport aux méthodes de Galerkin et de Galerkin itérée : on n'a pas besoin de conditions supplémentaires pour obtenir la superconvergence de la solution approchée vers la solution exacte.

#### Article[16]

##### **Nonlinear integral equation of the second kind : a new version of Nyström method**

Dans cet article, on s'intéresse à un opérateur intégral non linéaire  $K : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}$  étant un espace de Banach et  $\mathcal{O}$  un ouvert non vide de  $\mathcal{B}$ , donné sous la forme

$$K(x)(s) := \int_0^1 \kappa(s, t, x(t)) dt, \quad x \in \mathcal{B}, \quad s \in [0, 1],$$

où le noyau  $\kappa$  est une fonction numérique de trois variables :

$$(s, t, u) \in [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R} \mapsto \kappa(s, t, u) \in \mathbb{R},$$

avec assez de régularité pour que  $K$  soit Fréchet-différentiable sur  $\mathcal{O}$ . Le problème est le suivant :

$$(4.5) \quad \text{Trouver } \varphi \in \mathcal{O} : \quad \varphi = K(\varphi) + f,$$

pour une fonction donnée  $f \in \mathcal{B}$ .

Comme dans le cas linéaire, le principe de la méthode de Nyström est d'approcher la solution  $\varphi$  en approchant l'opérateur  $K$  par  $K_n$ , déduit de  $K$  en remplaçant l'intégration par une quadrature numérique. Cela conduit à un système non linéaire dans un espace de dimension finie. Pour le résoudre, on peut utiliser la méthode de Newton-Kantorovich. Cette stratégie commence

par un processus de discrétisation et continue avec la phase de linéarisation par la méthode de Newton du système non linéaire de dimension finie (voir [3] pour plus de détails).

Une question naturelle se pose : Est-il théoriquement équivalent de commencer par appliquer le procédé de linéarisation puis la discrétisation par la méthode de Nyström ? Dans cet article nous analysons cette stratégie : nous appliquons d'abord la méthode de Newton-Kantorovich à l'équation (4.5) dans un contexte d'espaces fonctionnels puis la méthode de Nyström à chaque équation linéaire fournie par le processus de Newton.

Nous avons mis en évidence une propriété vraiment étonnante de cette stratégie :

On construit une suite d'itérés qui, quand elle converge, tend vers la solution exacte  $\varphi$  quand le nombre d'itérés de la méthode de Newton tend vers  $+\infty$  et ceci pour n'importe quel paramètre fixé  $n$ . Cela signifie qu'en résolvant un système de taille  $n$ , on peut approcher la solution à la précision voulue. Dans le cas de la stratégie classique-discrétisation puis linéarisation- les itérés sont convergents vers l'approximation  $\psi_n$  d'ordre  $n$  de la méthode de Nyström :  $\psi_n$  est solution de l'équation approchée  $\psi = K_n(\psi) + f$ , où  $K_n$  est l'approximation de Nyström de  $K$ .

#### Article[17]

#### **For nonlinear infinite dimensional equations, which to begin with : linearization or discretization ?**

Cet article est une généralisation de l'article précédent : On se place dans un contexte plus général en traitant le problème de déterminer  $\varphi \in \mathcal{X}$  solution de  $F(\varphi) = 0$ ,  $F$  étant un opérateur non linéaire Fréchet différentiable sur un espace de Banach complexe  $\mathcal{X}$ . La stratégie classique de résolution est de discrétiser le problème, par une méthode de projection par exemple (voir [2] ou [39]) puis de résoudre le système non linéaire par une méthode de type Newton. Dans ce cas, nous obtenons une approximation de la solution approchée par discrétisation.

Nous proposons de commencer par la linéarisation. Nous montrons que, sous une condition sur la discrétisation, les itérés construits par notre méthode, s'ils sont convergents, tendent vers la solution exacte  $\varphi$  quand le nombre d'itérés tend vers  $+\infty$  et ceci quelque soit le paramètre de discrétisation choisi.

Nous présentons deux exemples pour illustrer le théorème : Nous traitons le cas d'une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce en choisissant

la méthode de projection de Kantorovitch comme procédé de discrétisation et la méthode de Newton-Kantorovich comme méthode de linéarisation. La deuxième application concerne le problème spectral d'un opérateur différentiel.



# Bibliographie

- [1] M. Ahues , A. Largillier and B.V. Limaye, Spectral Computations for Bounded Operators, Applied mathematics 18 Chapman and Hall (2001)
- [2] K.E. Atkinson and F.A Potra, Projection and iterated projection methods for nonlinear integral equations, SIAM J. Numer. Anal, vol 24, No.6 , 1987 pp. 1352-1373.
- [3] K.E. Atkinson, A survey of numerical methods for solving nonlinear integral equations, J. Integral Equations and appl., vol 4, Number 1, Winter 1992
- [4] Champier, S and Grammont, L, Note on the Norm involved in the Definition of the  $\varepsilon$ -spectrum, Applied mathematics letters 14 (2001) 393-397
- [5] S. Champier and L.Grammont, A wavelet-vaguelet method for unfolding sphere size distribution, Inverse Problem 18 (2002) p79-94
- [6] DL. Donoho, Nonlinear solution of linear inverse problems by wavelet-vaguelette decomposition, Preprint University of California, Berkeley (1995)
- [7] A. Elderman and H. Murakami, Polynomial roots from companion matrix eigenvalues, Math of Comp, volume 64,number 210 , (1995) pp 763-776
- [8] R. Erra, Sur quelques problèmes inverses structurés de valeurs propres et de valeurs singulières, Thèse de doctorat de l'université de Rennes I, N d'ordre 1425, (1996)
- [9] L.Grammont and A. Largillier, On  $\varepsilon$ -spectra and stability radii, Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 147, Issue 2 15 October 2002 Pages 453-469
- [10] L. Grammont, Characteristic polynomials and pseudospectra, Linear algebra proceeding [http ://www.siam.org/meetings/ la03/proceedings](http://www.siam.org/meetings/la03/proceedings)

- [11] L. Grammont, A. Largillier, Krylov method revisited with an application to the localization of eigenvalues, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 27(5-6) :1-36 (2006)
- [12] L. Grammont and R. Kulkarni, A superconvergent projection method for nonlinear compact operator equations, *C. R. Acad. Sci. Paris* volume 342, n3, pp 215-218 (fev 2006)
- [13] L. Grammont, A Mixed Two Grid Method Applied to a Fredholm Equation of the Second Kind, C. Constanda and M.E Pérez (eds) *Integral Methods in Science and Engineering. vol 2 : Computational Methods* (2009) p173-181
- [14] Laurence Grammont, Nicholas J. Higham and Francoise Tisseur, A Framework for Analyzing Nonlinear Eigenproblems and Parametrized Linear Systems, *Linear Algebra and its Applications* 435 (2011) 623640
- [15] L. Grammont, A Galerkin's perturbation type method to approximate a fixed point of a compact operator, *International Journal of Pure and Applied Mathematics IJPAM*, vol. 69, No. 1 (2011).
- [16] L. Grammont, Nonlinear integral equation of the second kind : a new version of Nyström method, soumis à *IMA Journal of Numerical Analysis*.
- [17] L. Grammont, M. Ahues, F. D. D'Almeida, For nonlinear infinite dimensional equations, which to begin with : linearization or discretization ?, soumis à *SIAM Journal on Numerical Analysis*.
- [18] N.J Higham and F. Tisseur, A Block Algorithm for Matrix 1-Norm Estimation with an Application to 1-Norm Pseudospectra, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, Vol. 21, 1185-1201, 2000.
- [19] N.J. Higham, The Matrix Computation Toolbox, [http ://www.ma.man.ac.uk/ higham/mctoolbox/](http://www.ma.man.ac.uk/higham/mctoolbox/).
- [20] R. Horn and C.R Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, Cambridge (1985).
- [21] M.A Krasnoselskii, P.P Zabreiko, *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo (1984).
- [22] M.A Krasnoselskii, *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*, Pergamon Press, New-York (1964).
- [23] R. P. Kulkarni, A Superconvergence Result for Solutions of Compact Operator Equations, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 68, (2003), pp.517-528.

- [24] R. P. Kulkarni, On improvement of the iterated Galerkin solution of the second kind integral equations, *Journal of Numerical Mathematics*, Volume : 13, Issue : 3 (2005) pp. 205-218.
- [25] P. Lancaster, M. Tismenetsky, *The theory of matrices*, second ed., Academic Press, London, 1985,
- [26] Q. Lin, I.H. Sloan, and R. Xie, Extrapolation of the iterated-collocation method for integral equations of the second kind, *SIAM J. Numer. Anal.* 6 :15351541, (1990).
- [27] D. Steven Mackey, Niloufer Mackey, Christian Mehl, and Volker Mehrmann, Vector spaces of linearizations for matrix polynomials, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 28 (4) : pp 971–1004, 2006.
- [28] W. McLean, Aymptotic error expansions for numerical solution of integral equations, *IMA J. Numer. Anal.* 9 :373384, (1989).
- [29] A.N Malyshev and M. Sadkane, On the stability of large matrices, *J. Comp. Appl.* 102 (1999) PP 303-313.
- [30] P. Misra, E.S Quintana and P. Van Dooren, Numerically Reliable Computation of the characteristic polynomial, *Proc of American Control Conference* pp 4025-4029, ISBS 0-7803-2550-08 Seattle (USA) ISBN 0-08-0424321, June 1995
- [31] R.G Mosier, Root Neighborhoods of a Polynomial, *Math. of Com.* vol47, number 175 (1986) , pp 265-273.
- [32] M. Sadkane and L.Grammont, A note on the Lyapunov stability of periodic discrete-time systems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, volume 176, n2, pp 463-466 (2005)
- [33] V. Simoncini, Remarks on nonlinear spectral problem, *BIT* 39 (2) (1999).
- [34] I. H. Sloan, Improvement by iteration for compact operator equations, *Math. Comp.* 30 (1976) pp. 758-764.
- [35] I. H. Sloan, Superconvergence in Numerical Solution of Integral Equations, M. Golberg ed. Plenum Press (1990) pp. 35-70.
- [36] K.C. Toh and L.N. Trefethen, Pseudozeros of polynomials and pseudospectra of companion matrices, *Numer. Math.* 68 : 17, (1994) pp 403-425.
- [37] L.N Trefethen, Computation of pseudospectra, in *Acta numerica*, pp 199-237, Cambridge University Press, (1993).



- [38] G. Vainikko, Fast solvers of integral equations of the second kind : quadrature methods, J. Integral equations and applications, vol 17, number 1, Spring 2005 pp 91-120
- [39] G. M. Vainikko, Galerkin's perturbation method and general theory of approximate methods for non-linear equations, USSR Comput. Math. and Math. Phys. vol. 7 No 4 (1967).
- [40] J.H Wilkinson, Rounding errors in the algebraic processes, Englewoods Cliffs :Prentice-Hall 1963.